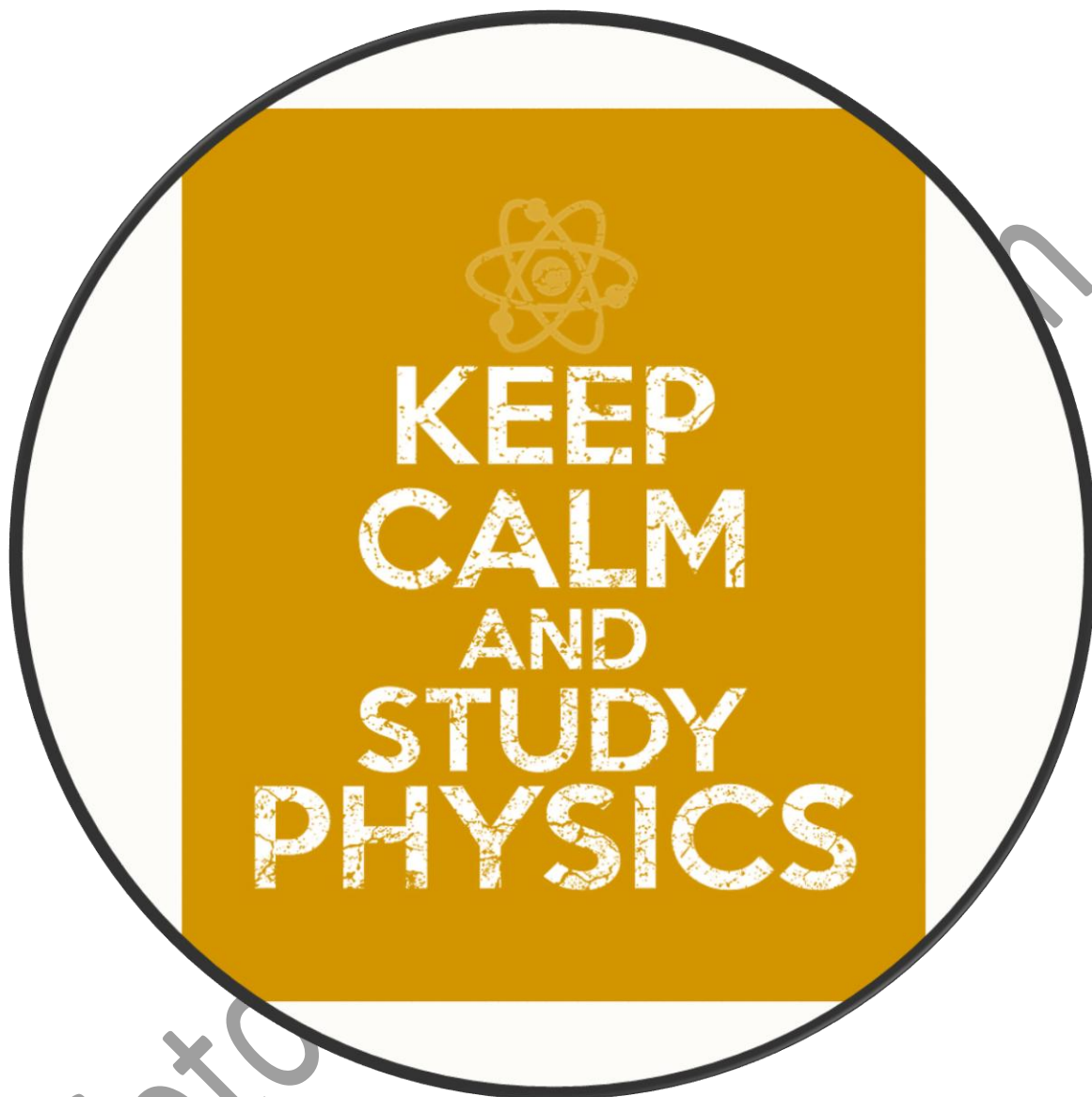




ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ A.A.T.

SPECIAL TIPS

ANNA ΜΑΝΩΛΑΚΗ thefotonion@gmail.com

ΑΜΕΙΩΤΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Περιοδικά φαινόμενα και φυσικά μεγέθη που τα περιγράφουν

- ♦ **Περιοδικά φαινόμενα** ονομάζονται τα φαινόμενα που εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα σε σταθερά χρονικά διαστήματα.

- ♦ **Περίοδος :** ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί ένα περιοδικό φαινόμενο. Αν σε χρονικό διάστημα Δt γίνονται N επαναλήψεις του φαινομένου, η περίοδος είναι ίση με το πηλίκο

$$T = \Delta t / N$$

- ♦ **Συχνότητα** του περιοδικού φαινομένου: Το πηλίκο $f = N / \Delta t$ του αριθμού των επαναλήψεων του φαινομένου προς τον αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

- ♦ Μονάδα μέτρησης της περιόδου είναι το 1 s και της συχνότητας το 1 s^{-1} ή 1 κύκλος/s ή 1 Hz .

- ♦ Τα μεγέθη **περίοδος και συχνότητα** είναι **αντίστροφα** συνδέονται δηλαδή με τη σχέση $T = 1/f$

- ♦ **Γωνιακή συχνότητα ω (ρυθμός μεταβολής της φάσης)**

Δείχνει τον αριθμό των επαναλήψεων σε χρονική διάρκεια $2\pi \text{ s}$.

$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi f, \quad \omega = \frac{2\pi N}{\Delta t}$$

Μονάδα μέτρησης της γωνιακής συχνότητας είναι το 1 rad/s .

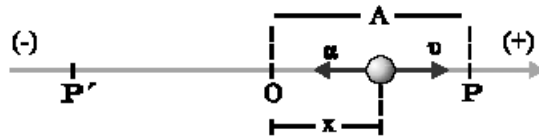
Απλή αρμονική ταλάντωση

- ♦ **Ταλάντωση** : Μια περιοδική παλινδρομική κίνηση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων.
- ♦ **Γραμμική ταλάντωση** : Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία τροχιά.
- ♦ **Απλή αρμονική ταλάντωση** : Αν η απομάκρυνση x του σώματος από το σημείο O (θέση ισορροπίας της ταλάντωσης) δίνεται κάθε στιγμή από τη σχέση:

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \quad (1)$$

Δηλ η απομάκρυνση από τη ΘI είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου

- ♦ **Πλάτος (A)** της ταλάντωσης: είναι η μέγιστη απομάκρυνση από τη ΘI ,



δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο O στην οποία φτάνει το κινητό.

- ♦ Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος κάθε στιγμή δίνονται από τις σχέσεις:

$$v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu (\omega t + \phi_0) \quad (2) \quad \text{με } v_{\max} = \omega A$$

$$a = -a_{\max} \eta \mu (\omega t + \phi_0) \quad (3) \quad \text{με } a_{\max} = \omega^2 A$$

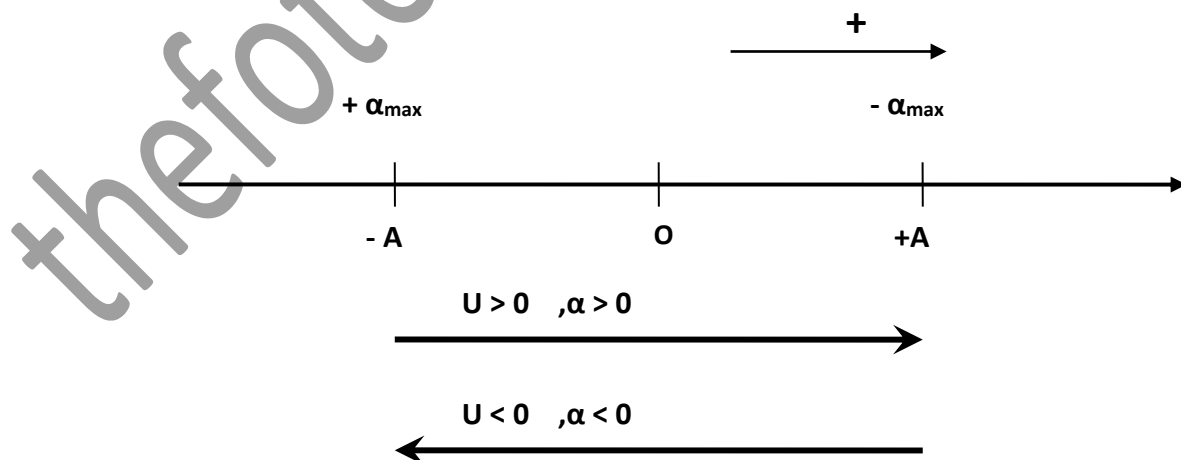
όπου $v_{\max}$ και $a_{\max}$, αντίστοιχα η μέγιστη τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει **μέγιστη ταχύτητα όταν περνά από τη θέση ισορροπίας O ($x = 0$)** και **μέγιστη επιτάχυνση όταν περνάει από τα ακραία σημεία P και P' ($x = A$ και $x = -A$ αντίστοιχα).**

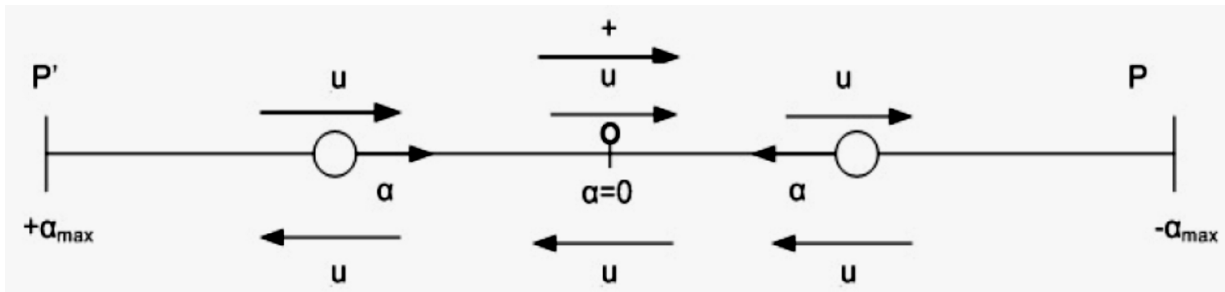
- Η γωνία $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ ονομάζεται **φάση** της ταλάντωσης και καθορίζει τη θέση του ταλαντωτή κάθε χρονική στιγμή .
- Η γωνία φ_0 ονομάζεται **αρχική φάση** . Παίρνει τιμές $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ rad καθορίζει τη θέση του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή $t=0$.
- Σε μία αρμονική ταλάντωση δεν έχουμε αρχική φάση όταν τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό βρίσκεται στο σημείο Ο ($x=0$) (ΘΙ) και κινείται κατά τη θετική φορά . Δηλαδή

$$\underline{\Phi_0 = 0 \text{ όταν για } t = 0 : x = 0, U > 0}$$

Οι αλγεβρικές τιμές των μεγεθών θέση, ταχύτητα και επιτάχυνση

Τα σύμβολα x , v και a παριστάνουν τις αλγεβρικές τιμές των αντίστοιχων διανυσματικών μεγεθών θέση (απομάκρυνση) ταχύτητα και επιτάχυνση. Το εάν η τιμή καθενός από αυτά είναι θετική ή αρνητική καθορίζεται σε σχέση με τον άξονα $x'x$, εάν δηλαδή η κατεύθυνση οποιουδήποτε από αυτά συμπίπτει με τη φορά του άξονα η αλγεβρική τιμή του είναι θετική





ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΜΙΑΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

$\Theta I \rightarrow +A$ Επιβραδυνόμενη κίνηση

$+A \rightarrow \Theta I$ Επιταχυνόμενη κίνηση

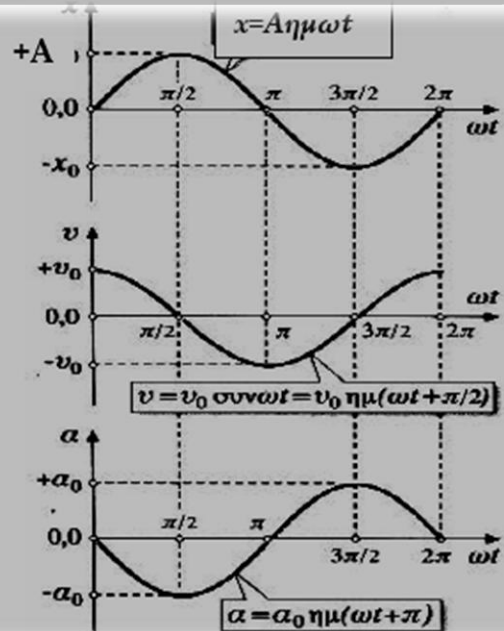
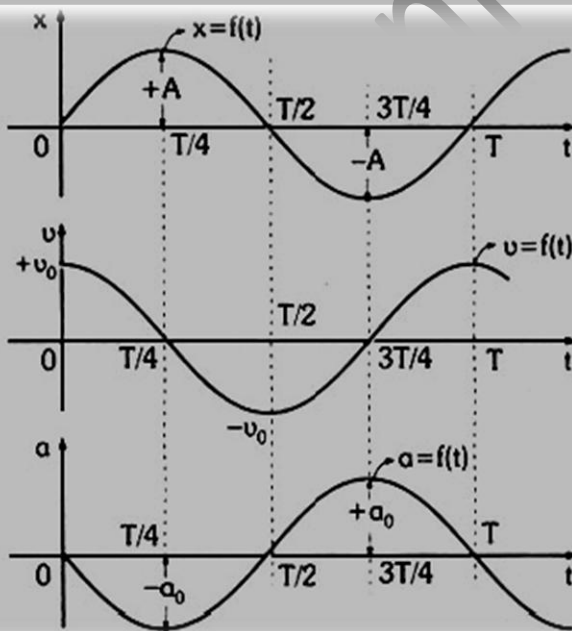
$\Theta I \rightarrow -A$ Επιβραδυνόμενη κίνηση

$-A \rightarrow \Theta I$ Επιταχυνόμενη κίνηση

Η επιτάχυνση έχει πάντοτε φορά προς τη ΘI

Γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο

(Όταν η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση)



Διαφορά φάσης

Όταν δύο μεγέθη έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω τότε η διαφορά φάσης είναι χρονικά σταθερή.

Για να βρούμε τη διαφορά φάσης δύο μεγεθών, πρέπει τα μεγέθη να εκφράζονται με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό.

- Μεταξύ ταχύτητας και απομάκρυνσης

$$x = A\eta\mu\omega t \text{ και } u = u_{\max} \sigma\upsilon\nu \omega t \text{ ή } u = u_{\max} \eta\mu(\omega t + \pi/2)$$

$$\text{δηλ. } \varphi_x = \omega t \text{ και } \varphi_u = \omega t + \pi/2$$

Οπότε η διαφορά φάσης $\Delta\varphi$ των μεγεθών θα είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_x = \omega t + \pi/2 - \omega t = \pi/2$$

Δηλαδή η ταχύτητα προηγείται της απομάκρυνσης κατά $\pi/2$

- Μεταξύ επιτάχυνσης και απομάκρυνσης

$$x = A\eta\mu\omega t \text{ και } a = -a_{\max} \eta\mu \omega t \text{ ή και } a = a_{\max} \eta\mu(\omega t + \pi)$$

$$\text{δηλ. } \varphi_x = \omega t \text{ και } \varphi_a = \omega t + \pi$$

Οπότε η διαφορά φάσης $\Delta\varphi$ των μεγεθών θα είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_x = \omega t + \pi - \omega t = \pi$$

Δηλαδή η επιτάχυνση προηγείται της απομάκρυνσης κατά π

- Μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης

$$u = u_{\max} \sin \omega t \text{ ή } u = u_{\max} \sin(\omega t + \pi/2) \text{ και}$$

$$a = -a_{\max} \sin \omega t \text{ ή και } a = a_{\max} \sin(\omega t + \pi)$$

$$\text{δηλ. } \varphi_a = \omega t + \pi \text{ και } \varphi_u = \omega t + \pi/2$$

Οπότε η διαφορά φάσης $\Delta\varphi$ των μεγεθών θα είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_u = \omega t + \pi - \omega t - \pi/2 = \pi/2$$

Δηλαδή η επιτάχυνση προηγείται της ταχύτητας κατά $\pi/2$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ x, a, u

$$u = \mp \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a = \mp \omega \sqrt{u_{\max}^2 - u^2}$$

$$x = \mp \frac{1}{\omega} \sqrt{u_{\max}^2 - u^2}$$

A. ΣΧΕΣΗ ΘΕΣΗΣ – ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$x = A \sin \omega t \rightarrow \sin \omega t = \frac{x}{A} \quad (1)$$

$$u = u_{\max} \sin \omega t \rightarrow \sin \omega t = \frac{u}{u_{\max}} \quad (2)$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \quad (3)$$

$$(3) \xrightarrow{1,2} \frac{x^2}{A^2} + \frac{u^2}{u_{\max}^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{u^2}{(\omega A)^2} = 1 \rightarrow \frac{\omega^2 x^2}{\omega^2 A^2} + \frac{u^2}{\omega^2 A^2} = 1 \rightarrow$$

$$\omega^2 x^2 + u^2 = \omega^2 A^2 \rightarrow u^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \rightarrow \boxed{u = \mp \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$$

Η παραπάνω σχέση στην οποία καταλήξαμε πρέπει πάντα να την αποδεικνύουμε αν θέλουμε να τη χρησιμοποιήσουμε.

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή η ενέργεια της ταλάντωσης όταν αυτή είναι αμείωτη παραμένει σταθερή ισχύει:

$$E_T = K_T + U_T \rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} D x^2 \rightarrow$$

$$D A^2 - D x^2 = m u^2 \rightarrow D (A^2 - x^2) = m u^2 \xrightarrow{D=m\omega^2} m \omega^2 (A^2 - x^2) = m u^2 \rightarrow$$

$$\boxed{u = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}} \quad (4)$$

!Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο για κάθε τιμή θέσης υπάρχουν δύο τιμές ταχύτητας με το ίδιο μέτρο και διαφορετικό πρόσημο.

Β.ΣΧΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ - ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

$$a = -a_{\max} \eta \mu \omega t \rightarrow \eta \mu \omega t = -\frac{a}{a_{\max}} \quad (5)$$

$$u = u_{\max} \sigma \upsilon \nu \omega t \rightarrow \sigma \upsilon \nu \omega t = \frac{u}{u_{\max}} \quad (6)$$

$$\eta \mu^2 \omega t + \sigma \upsilon \nu^2 \omega t = 1 \quad (7)$$

$$(7) \xrightarrow{5,6} \frac{\alpha^2}{\alpha_{\max}^2} + \frac{u^2}{u_{\max}^2} = 1 \rightarrow \frac{\alpha^2}{(\omega^2 A)^2} + \frac{u^2}{(\omega A)^2} = 1 \rightarrow \frac{\alpha^2}{\omega^4 A^2} + \frac{\omega^2 u^2}{\omega^4 A^2} = 1 \rightarrow$$

$$\alpha^2 + \omega^2 u^2 = \omega^4 A^2 \rightarrow \alpha^2 = \omega^4 A^2 - \omega^2 u^2 \rightarrow \alpha = \mp \omega \sqrt{u_{\max}^2 - u^2} \rightarrow$$

$$\alpha = \mp \omega \sqrt{A^2 - u^2} \quad (8)$$

Τις σχέσεις (4), (8) πρέπει πάντα να τις αποδεικνύουμε αν θέλουμε να τις χρησιμοποιήσουμε σε κάποια άσκηση.

Δύναμη επαναφοράς

- Η δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση και είναι ανάλογη της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας
- Έχει ως φορέα την ευθεία πάνω στην οποία γίνεται η ταλάντωση του σώματος
- Έχει αντίθετη φορά από την απομάκρυνση του σώματος
- Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής

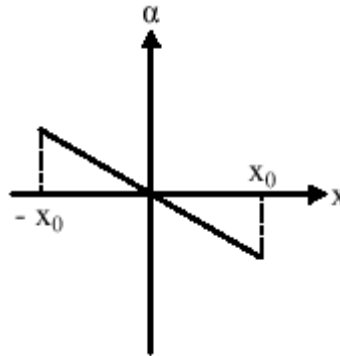
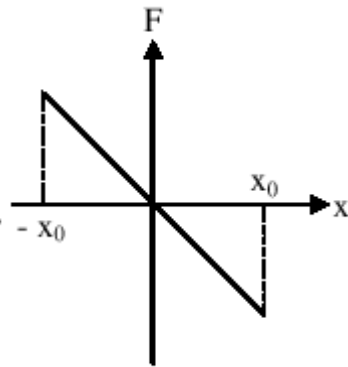
$$F = m a \quad \text{επειδή } a = -a_{\max} \eta \mu(\omega t) \text{ γίνεται } F = -m a_{\max} \eta \mu(\omega t) \text{ ή}$$

$$F = -m \omega^2 A \eta \mu(\omega t)$$

$$\text{ή } F = -m \omega^2 x \quad \text{ή } F = -D x$$

η σταθερά αναλογίας D ονομάζεται **σταθερά επαναφοράς**, είναι $D = m \omega^2$ και η τιμή της εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος που εκτελεί την ταλάντωση

- η γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση φαίνονται ,αντίστοιχα στο παρακάτω σχήμα.



$$F = - D x$$

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t) \text{ ή } \alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t)$$

$$\text{ή } \alpha = -\omega^2 x$$

με $-x_0 \leq x \leq x_0$, ($x_0 = A$)

Η σχέση $F = - D x$ αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για να εκτελέσει ένα κινητό απλή αρμονική ταλάντωση .

Περίοδος της ταλάντωσης

Ο χρόνος για να γίνει μια πλήρης ταλάντωση

- Δεν εξαρτάται από το πλάτος A της ταλάντωσης

$$D = m \omega^2 \text{ ή } D = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \text{ ή } D = m \frac{4\pi^2}{T^2} \text{ ή } T^2 = m \frac{4\pi^2}{D} \text{ ή } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Ενέργεια ταλάντωσης

- Η κινητική και η δυναμική ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο

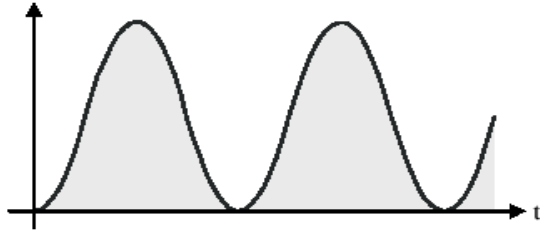
- Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι ανάλογη του τετραγώνου της απομάκρυνσης.
- Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι μηδέν στη θέση ισορροπίας και μέγιστη στις ακραίες θέσεις.
- Η κινητική ενέργεια ταλάντωσης είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του ταλαντευόμενου σώματος.
- Η κινητική ενέργεια ταλάντωσης είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας και μηδέν στις ακραίες θέσεις.
- Η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια .
- Η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια .
- Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης γίνονται ίσες τέσσερις φορές στη χρονική διάρκεια μίας περιόδου.
- Η μηχανική ενέργεια που έχει το σύστημα σε μια τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση: $E_{MHX} = K + U_{\Delta} = K_{\max} = U_{\Delta(\max)}$

$$\text{ή} \quad E_{MHX} = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m U^2 = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} m U_{\max}^2$$

Η μηχανική ενέργεια (ολική ενέργεια) στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι σταθερή ανεξάρτητη από την απομάκρυνση x και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους .

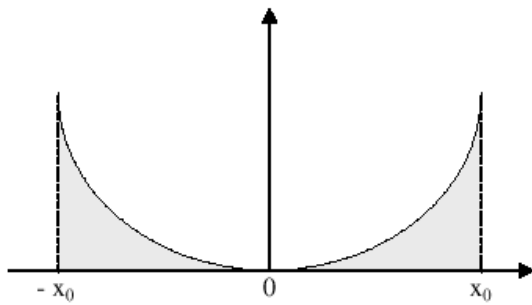
Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης

- Σε συνάρτηση με το χρόνο ($\varphi_0 = 0$)



$$U = \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή} \quad U = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \omega t$$

- Σε συνάρτηση με την απομάκρυνση

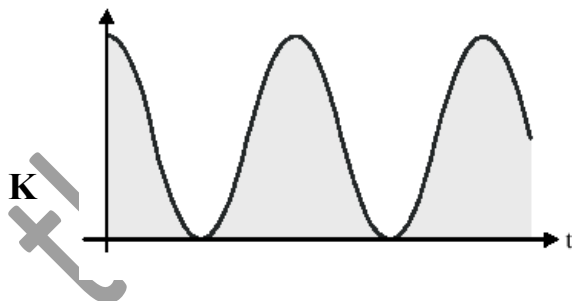


$$U = \frac{1}{2} D x^2$$

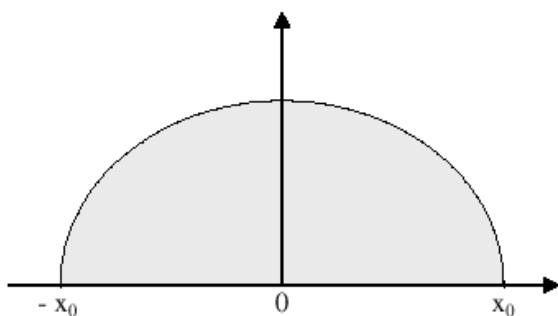
$$-x_0 \leq x \leq x_0$$

Κινητική ενέργεια ταλάντωσης

- Σε συνάρτηση με τον χρόνο: $K = \frac{1}{2} m U^2$ ή $K = \frac{1}{2} m U_{\max}^2 \sigma \upsilon^2 \omega t$



- Σε συνάρτηση με την απομάκρυνση:



$$E_{\mu\eta\chi} = K + U \quad \text{ή} \quad K = E_{\mu\eta\chi} - U \quad \text{ή}$$

$$K = \frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D x^2 \quad \text{ή}$$

$$K = K_{\max} - \frac{1}{2} D x^2$$

$\mu\epsilon \quad -x_0 \leq x \leq x_0$

1^Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Οι εξισώσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γενικά, διαβάζοντας προσεκτικά την εκφώνηση προσπαθούμε να βρούμε τα μεγέθη: αρχική φάση (ϕ_0), πλάτος (A) και κυκλική συχνότητα (ω).

1. Σε μια α.α. ταλάντωση χωρίς αρχική φάση:

t	x	u	a	F	ϕ
0	0	$+u_{\max}$	0	0	0
$T/4$	$+A$	0	$-a_{\max}$	$-F_{\max}$	$\pi/2$
$T/2$	0	$-u_{\max}$	0	0	π
$3T/4$	$-A$	0	$+a_{\max}$	$+F_{\max}$	$3\pi/2$
T	0	$+u_{\max}$	0	0	2π

2. Ταυτοποίηση

Αν δίνονται οι εξισώσεις σε συνάρτηση με τη θέση ή σε συνάρτηση με το χρόνο τότε, γράφοντας την θεωρητική μορφή της σχέσης, αντιστοιχίζουμε τα φυσικά μεγέθη με τις τιμές που παρουσιάζονται στην εξίσωση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$x = 0,1 \text{ ημ} (10t + \pi/2) \quad (1) \text{ (SI)}$$

Επειδή η σχέση (1) είναι της μορφής $x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0)$, άρα

$$A = 0,1 \text{ m} \quad , \quad \omega = 10 \text{ r/s} \quad , \quad \phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

$$K = 100 - 50x^2 \quad (2) \text{ (SI)}$$

Επειδή η σχέση (2) είναι της μορφής $K = E - \frac{1}{2} D x^2$, άρα

$$E = 100 \text{ J}, \quad \frac{1}{2} D = 50 \rightarrow D = 100 \text{ N/m}$$

3. Όταν ζητείται να γραφεί η χρονική εξίσωση ενός μεγέθους:

Στην αντίστοιχη χρονική εξίσωση υπολογίζουμε και αντικαθιστούμε τα μεγέθη αφήνοντας το χρόνο ως μεταβλητή.

Π.χ. χρονική εξίσωση δύναμης επαναφοράς: $F = - \mathbf{DA} \text{ ημ} (\omega t + \phi_0)$

Υπολογίζω D, A, ω , ϕ_0 και αντικαθιστώ.

4. Πως βρίσκω την αρχική φάση της ταλάντωσης

A) Από την εκφώνηση της άσκησης : Βρίσκουμε την πρόταση που αναγράφονται οι αρχικές συνθήκες δηλαδή τη χρονική στιγμή που θεωρούμε ως $t=0$, πια είναι η θέση (x) του ταλαντωτή και ποιο είναι το πρόσημο της ταχύτητας του. Έτσι σημειώνουμε τις εξής τιμές :

$$t=0 \text{ ,}$$

$$x=x_1, u: \text{ πρόσημο}$$

$$\text{ή } u = u_1 \text{ , } x: \text{ πρόσημο}$$

ή $\alpha = \alpha_1$, u: πρόσημο

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες στην αντίστοιχη χρονική εξίσωση και προχωράμε στην επίλυση της.

Παράδειγμα

Για $t=0$, $x= +A$, $u=0$

$$\text{Άρα } \eta\mu\varphi_0 = \frac{x}{A} = \frac{A}{A} = 1 \rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\varphi_0 = 2k\pi + \pi/2$$

Για $k=0$: $\varphi_0 = \pi/2$ rad

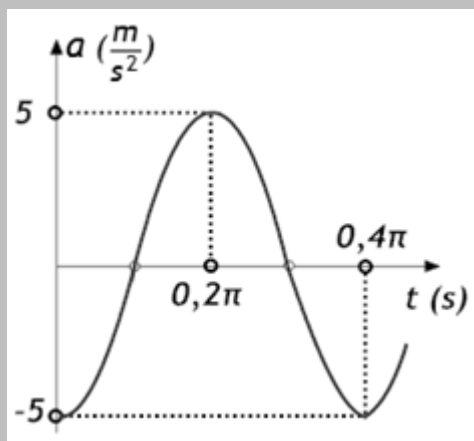
Την αρχική φάση μπορούμε να τη βρούμε είτε από τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είτε από τη χρονική εξίσωση της επιτάχυνσης εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες.

B) Από γραφική παράσταση

Ομοίως από το διάγραμμα προσδιορίζουμε την αρχική κατάσταση του ταλαντωτή και λύνουμε την κατάλληλη τριγωνομετρική εξίσωση.

Παράδειγμα

Έστω ότι δίνεται η γραφική παράσταση $a=f(t)$ για ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ.



Από αυτή παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

Για $t=0$: $a=-a_{\max}$, άρα $x=+A$ και $u=0$

5. Όταν ζητείται η τιμή ενός μεγέθους σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή:

Στην αντίστοιχη χρονική εξίσωση αντικαθιστούμε τη χρονική στιγμή και λύνουμε την εξίσωση.

6. Όταν ζητείται η χρονική διάρκεια μετάβασης του ταλαντωτή από μια θέση (x_1) της ταλάντωσης σε μια άλλη (x_2).

Στη χρονική εξίσωση θέσης $x=f(t)$ αντικαθιστούμε τη μεταβλητή x με τις τιμές x_1 , x_2 διαδοχικά και λύνουμε τις τριγωνομετρικές εξισώσεις. Επιλέγουμε τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 σύμφωνα με το πρόσημο της ταχύτητας και βρίσκουμε το χρονικό διάστημα $\Delta t = |t_1 - t_2|$.

7. Όταν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της ορμής.

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx$$

8. Όταν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot u$$

9. Όταν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.

$$E = K + U_{\Delta} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU_{\Delta}}{dt} \xrightarrow{E=\sigma\tau\alpha\theta} \frac{dU_{\Delta}}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

10. Όταν ζητείται το έργο της δύναμης επαναφοράς

$$W_{F\epsilon\pi} = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$$

Η

$$W_{F\epsilon\pi} = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\epsilon\lambda}$$

11. Όταν ζητείται ο λόγος $\frac{K}{U_{\Delta}}$ ή $\frac{K}{E}$ ή $\frac{U_{\Delta}}{E}$

A. Αν γνωρίζω απομάκρυνση (x) και πλάτος (A)

$$\frac{K}{U_{\Delta}} = \frac{E - U_{\Delta}}{U_{\Delta}} = \frac{E}{U_{\Delta}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}Dx^2} - 1 = \frac{A^2}{x^2} - 1$$

B. Αν γνωρίζω την ταχύτητα (u) και τη μέγιστη ταχύτητα ($u_{\max}$)

$$\frac{K}{U_{\Delta}} = \frac{K}{E - K} = \frac{\frac{1}{2}mu^2}{\frac{1}{2}mu_{\max}^2 - \frac{1}{2}mu^2} = \frac{u^2}{u_{\max}^2 - u^2}$$

12. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα κάποια χρονική στιγμή , όταν γνωρίζουμε την απομάκρυνση την ίδια χρονική στιγμή (ή το αντίστροφο) , χρησιμοποιούμε την ΑΔΕ για την ταλάντωση.

13. Η σχέση $\Sigma F = -Dx$ αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα απλή αρμονική ταλάντωση. Οπότε αν ζητηθεί να αποδείξουμε ότι ένα σώμα εκτελεί α.α.τ. αρκεί να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που δέχεται σε μια τυχαία θέση και να αποδείξουμε ότι η συνισταμένη τους είναι της μορφής $-Dx$.

15. Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από την ολική ενέργεια της ταλάντωσης. Επομένως αν γνωρίζουμε την κινητική και τη δυναμική ενέργεια, υπολογίζεται εύκολα εφαρμόζοντας την ΑΔΕ για την ταλάντωση.

16. Η ενέργεια που προσφέρουμε για να ξεκινήσει η ταλάντωση ισούται με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης: $E_{\text{προσφ.}} = E_{\text{ολ(ταλ.)}}$.

17. Η δυναμική και η κινητική ενέργεια είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με γωνιακή συχνότητα διπλάσια από αυτή της ταλάντωσης $\Pi\chi$. Αν η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f=2\text{Hz}$ η συχνότητα μεγιστοποίησης της δυναμικής ενέργειας είναι $f'=4\text{Hz}$.

18. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση, τα αρμονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη μεγιστοποιούνται ή μηδενίζονται σε χρονικό διάστημα $T/2$.

19. Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση ο ταλαντωτής διανύει διάστημα $S=4A$.

2^η Κατηγορία ασκήσεων :ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ - ΜΑΖΑ

Ιδανικό ελατήριο : Ελατήριο ονομάζεται ένα μηχανικό εξάρτημα το οποίο έχει την ικανότητα να αποθηκεύει μηχανική ενέργεια παραμορφωμένο προσωρινά. Σε ιδανικά θεωρητικά ελατήρια ισχύει απόλυτα ο νόμος του Hooke, δε χάνεται ενέργεια στο περιβάλλον και τα ελατήρια μπορούν πάντα να επιστρέψουν στο αρχικό τους μήκος.

Φυσικό μήκος του ελατηρίου (ℓ_0): Είναι το μήκος του ελατηρίου, όταν αυτό δεν έχει υποστεί παραμόρφωση.

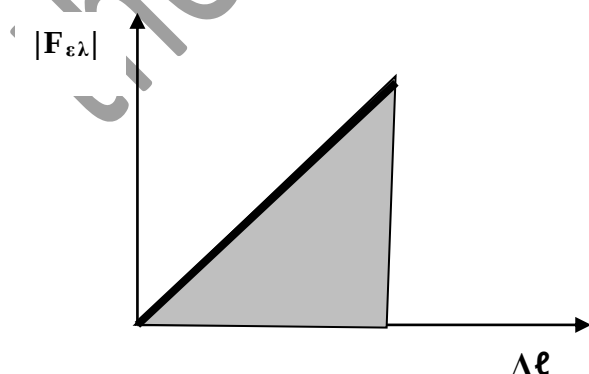
Παραμόρφωση ($\Delta\ell$: Επιμήκυνση ή συσπίρωση) : Υπολογίζεται πάντα σε σχέση με τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Δύναμη του ελατηρίου ($F_{ελ}$) : Είναι ανάλογη της προκαλούμενης παραμορφώσεως και έχει φορά πάντα προς τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

$$\vec{F}_{ελ} = -k \cdot \vec{\Delta\ell} \quad (\text{Νόμος του Hooke})$$

Σκληρότητα ή σταθερά k του ελατηρίου: Εκφράζει τη σκληρότητα ενός ελατηρίου, εξαρτάται από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά (μήκος, διατομή και αριθμό σπειρών), αλλά και από το πάχος του σύρματος και το μέταλλο από το οποίο είναι κατασκευασμένο.

Ενέργεια του παραμορφωμένου ελατηρίου: το έργο που καταναλώνει το εξωτερικό αίτιο για την παραμόρφωση ενός ελατηρίου απορροφάται από αυτό και εμφανίζεται ως δυναμική ελαστική ενέργεια του παραμορφωμένου ελατηρίου. Για παραμόρφωση που βρίσκεται μέσα στα όρια της ελαστικότητας του η δυναμική ενέργεια ενός παραμορφωμένου ελατηρίου υπολογίζεται από το εμβαδόν του τριγώνου στο διάγραμμα της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με την παραμόρφωση $F_{ελ} = g(\Delta\ell)$.

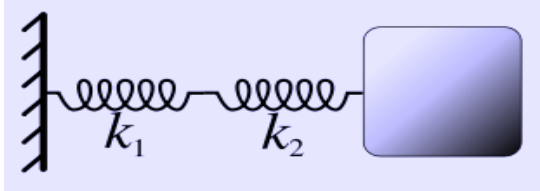
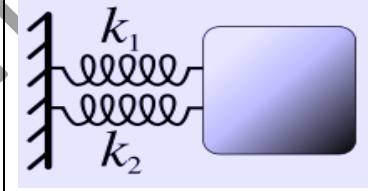


$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2$$

Έργο της δύναμης του ελατηρίου ($W_{F_{ελ}}$): Επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική το έργο της είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή δηλ. εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση. Άρα

$$W_{F_{ελ}} = U_{ελ.αρχική} - U_{ελ.τελική}$$

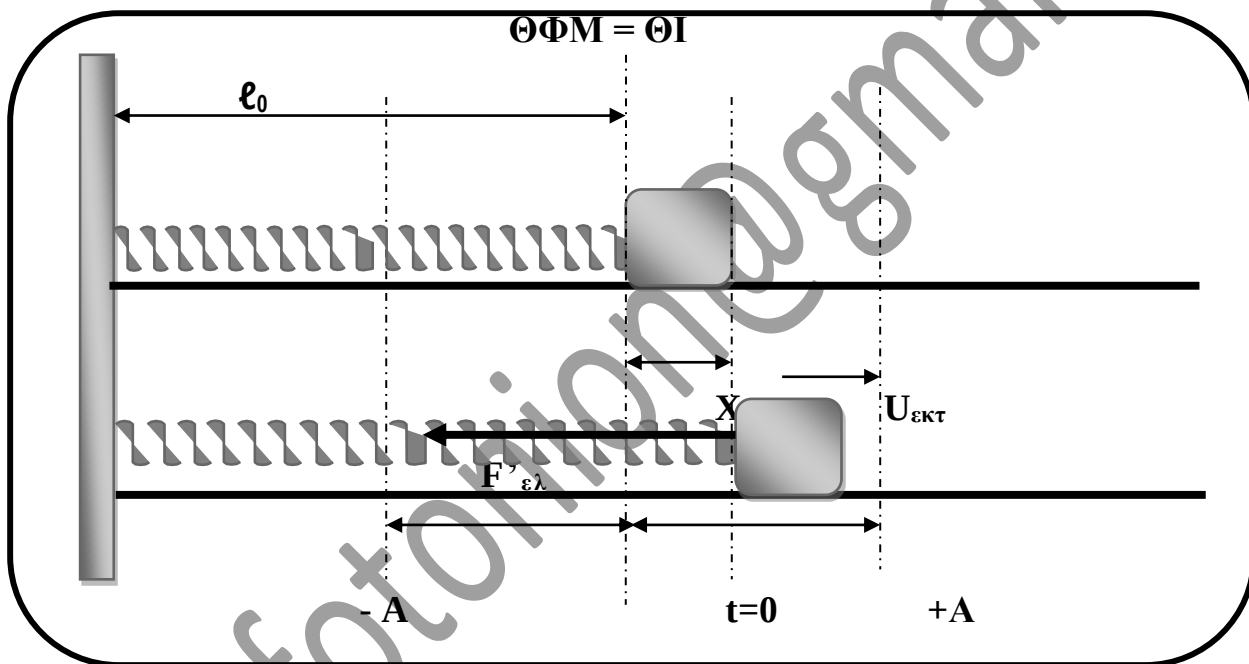
“Συνδεσμολογία” ελατηρίων

	“Σε σειρά”	“Παράλληλα”
		
Ισοδύναμη σταθερά ελατηρίου	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$	$k = k_1 + k_2$
Δύναμη ελατηρίου	$F_{ελ1} = F_{ελ2}$	$\Sigma F = F_{ελ1} + F_{ελ2}$
Παραμόρφωση	$\Delta \ell = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2$	$\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2$

Οριζόντιο ελατήριο

Όταν ένα σώμα είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου και κινείται χωρίς τριβές ή την επίδραση οριζόντιας εξωτερικής δύναμης σε λείο οριζόντιο επίπεδο εκτελώντας α.α.τ., τότε στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.

Επίσης, σε κάθε θέση αφού ασκείται μόνο μια δύναμη, αυτή του ελατηρίου, τότε η δύναμη επαναφοράς θα ταυτίζεται με τη δύναμη του ελατηρίου και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.



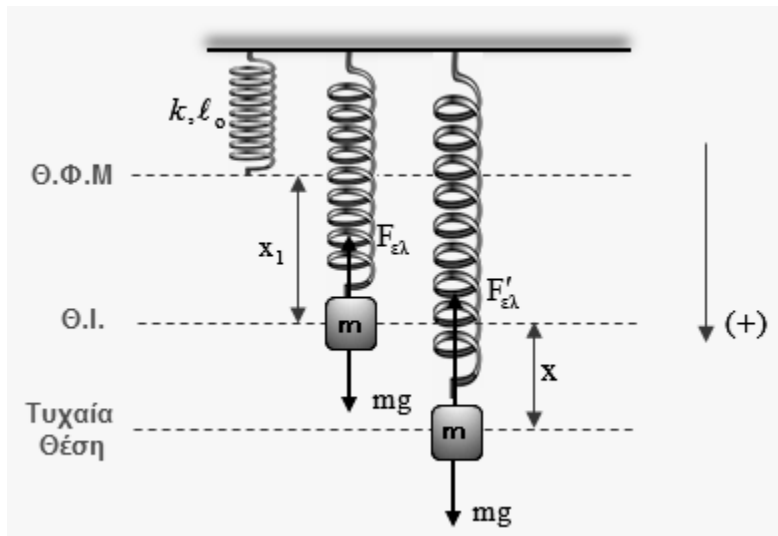
Για να αποδείξουμε ότι ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

1. Βρίσκουμε τη $\Theta\Gamma$ της ταλάντωσης σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα και απαιτώντας να ισχύει $\Sigma F=0$.
2. Με αρχή τη θέση ισορροπίας ορίζουμε άξονες συντεταγμένων xOx' με μια αυθαίρετη θετική φορά .

3. Θεωρούμε μια τυχαία θέση εκτροπής του σώματος κατά τη θετική φορά και υπολογίζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν πάνω του για τη διεύθυνση του άξονα xOx' . Ο υπολογισμός είναι αλγεβρικός και συνεπώς χρειάζεται προσοχή στο πρόσημο των δυνάμεων. Αν από τον υπολογισμό οδηγηθούμε σε συνισταμένη δύναμη ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας με αντίθετο πρόσημο τότε έχουμε αποδείξει το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ δύναμης και απομάκρυνσης χωρίς το πρόσημο είναι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης

- Όταν εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) και το αφήνουμε να κινηθεί από τη θέση που το εκτρέψαμε χωρίς αρχική ταχύτητα, τότε η θέση αυτή είναι ακραία θέση της ταλάντωσης, δηλαδή η εκτροπή (x) που προκαλέσαμε ισούται με το πλάτος (A) της ταλάντωσης.
- Όταν εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) και το εκτοξεύουμε με ταχύτητα $v_{εκτ}$ από τη θέση που το εκτρέψαμε, τότε η θέση αυτή είναι τυχαία θέση της ταλάντωσης, και προκειμένου να βρούμε το πλάτος εφαρμόζουμε ΑΔΕ στη θέση αυτή.

Κατακόρυφο ελατήριο



A. Σχεδιάζουμε:

1. ΘΦΜ

2. ΘΙ και τις δυνάμεις που ασκούνται στον ταλαντωτή .

3. Τη θέση που βρίσκεται ο ταλαντωτής την $t=0$.

B. Εφαρμόζουμε συνθήκη ισορροπίας στη ΘΙ: $\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{ελ} = mg \rightarrow$

$$k \cdot \Delta \ell_0 = mg$$

υπολογισμός
αρχικής
παραμόρφωσης
 $\Delta \ell_0 = mg/k$

υπολογισμός
περιοδου
 $m/k = \Delta \ell_0 / g$
άρα
 $T = 2\pi \sqrt{\Delta \ell_0 / g}$

απόδειξη α.α.τ

- Στην περίπτωση του κατακόρυφου ελατηρίου επειδή $\Theta\Phi M \neq \Theta I$: $U_{ελ} \neq U_{ταλ}$ και $F_{ελ} \neq F_{επαναφοράς}$. Δηλαδή :
- Σε κάθε θέση: $F_{επ} = -k \cdot x$ και $F_{ελ} = k \cdot \Delta\ell$

$$U_{ταλ} = \frac{1}{2} k x^2 \quad U_{ελ} = \frac{1}{2} k \Delta\ell^2$$

Όπου: x η απόσταση από τη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή

$\Delta\ell_0$ η απόσταση από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου

• Υπολογισμός της μέγιστης και της ελάχιστης δύναμης που δέχεται το σώμα από το ελατήριο

- **Μέγιστης δύναμη ελατηρίου:** Στην πιο μεγάλη απόσταση από τη $\Theta\Phi M$.δηλ στην πιο απομακρυσμένη ακραία θέση.

$$\text{Άρα } F_{ελmax} = k (\Delta\ell_0 + A)$$

- **Ελάχιστη δύναμη ελατηρίου:**

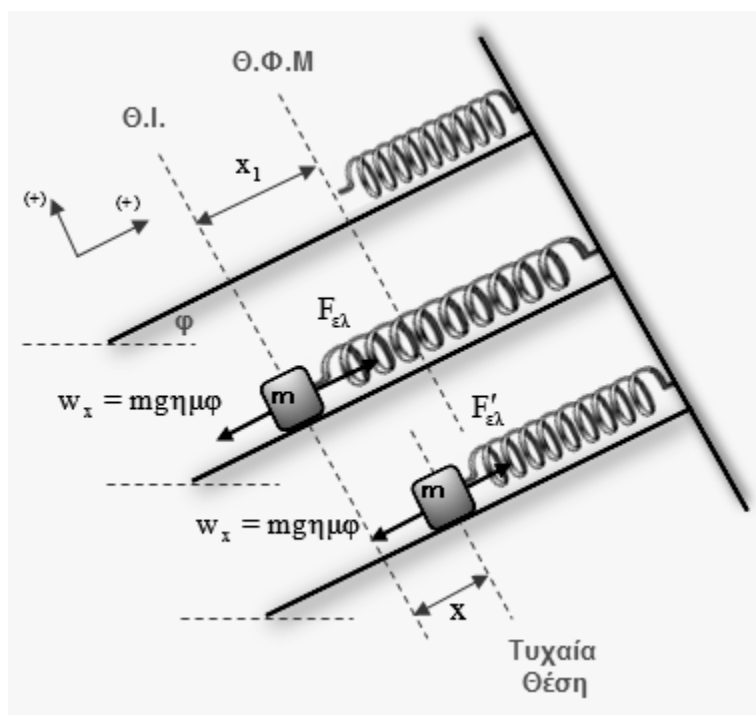
$$F_{ελmin} = 0 \quad \text{αν } A \geq \Delta\ell_0$$

$$F_{ελmin} = k (\Delta\ell_0 - A) \quad \text{αν } A \leq \Delta\ell_0$$

• Χρονική εξίσωση της $F_{ελ}$:

$$\overrightarrow{\Sigma F_{επ}} = -D\vec{x} \rightarrow \overrightarrow{F_{ελ}} + m\vec{g} = -D\vec{x} \quad \text{με } x = kA \text{ ημ}(\omega t + \phi_0)$$

Ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο



Ομοίως με το κατακόρυφο ελατήριο με την εξής διαφορά:

Στη ΘΙ: $\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{el} = m \cdot g \cdot \eta \mu \phi \rightarrow k \cdot \Delta \ell_0 = m g \cdot \eta \mu \phi$

Γενικά μια θέση της ταλάντωσης

- i) Για να είναι θέση ισορροπίας, πρέπει $\Sigma F = 0$
- ii) Για να είναι θέση μέγιστης απομάκρυνσης, πρέπει $u=0$.
- iii) Για να είναι τυχαία θέση, πρέπει το σώμα να απέχει απόσταση $x \neq 0$ από τη θέση ισορροπίας και να έχει ταχύτητα $u \neq 0$.