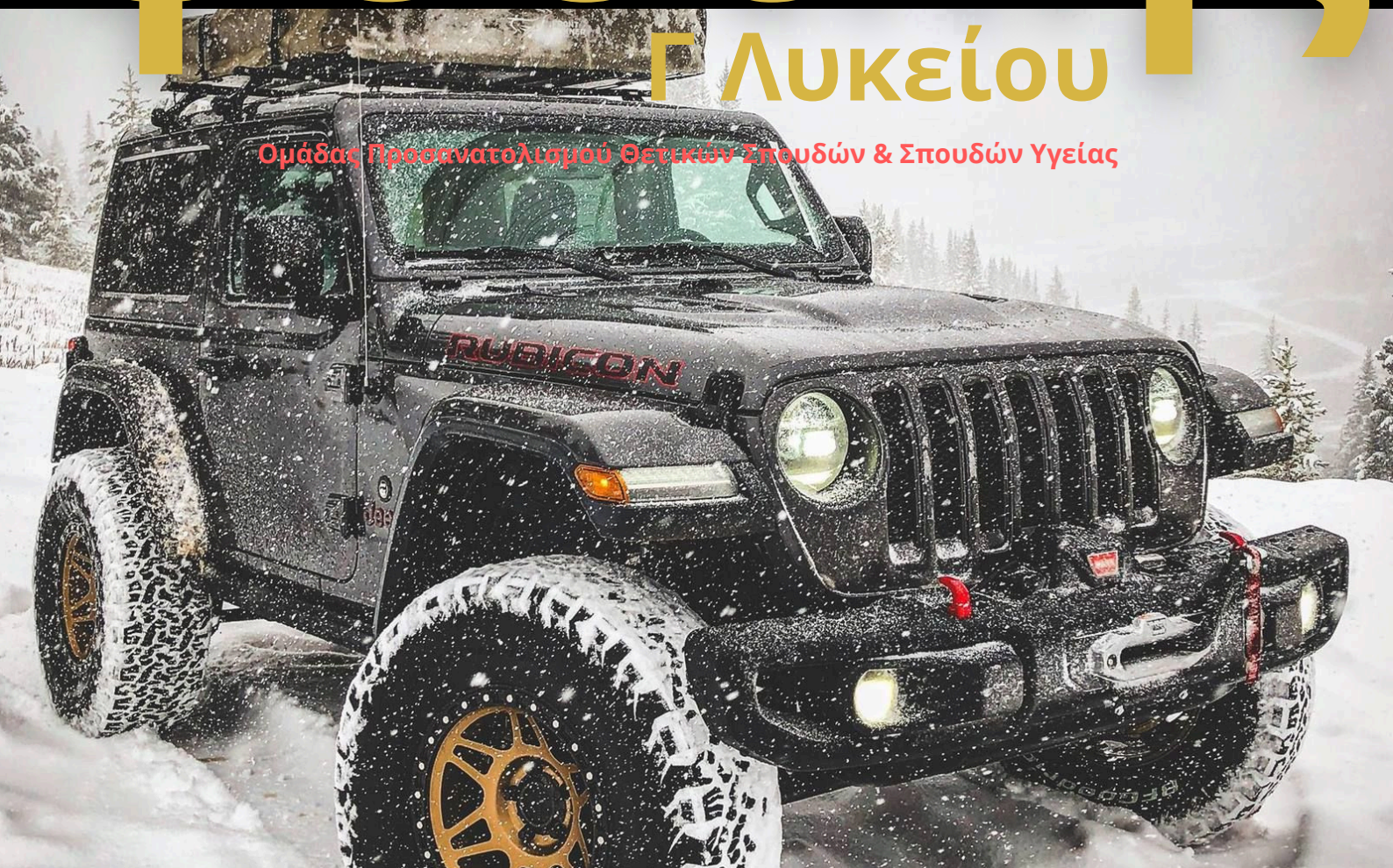


Διαγώνισμα φυσικής Γ Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας



Αναλυτικές απαντήσεις

Κρούσεις - Μηχανική Στερεού - Μηχανικές Ταλαντώσεις

2025

Άννα Μανωλάκη



Αναλυτικές Απαντήσεις

Κρούσεις – Ταλαντώσεις – Μηχανική Στερεού

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Υγείας

Άννα Μανωλάκη MSc

Θέμα Α

Στις ερωτήσεις από Α₁ μέχρι και Α₄ να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Α1. Επιλέγουμε την απάντηση δ.

Η ενέργεια E ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad (1)$$

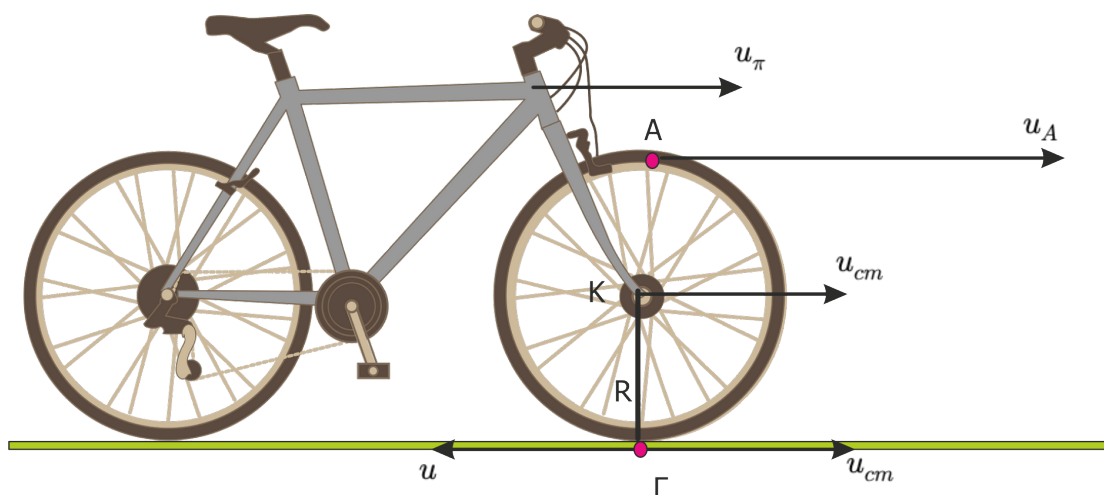
$$E' = \frac{1}{2}D(2A)^2 \Leftrightarrow E' = \frac{1}{2}D \cdot 4A^2 \quad (2)$$

Από (1),(2):

$$E' = 4E$$

5 μονάδες

Α2. Επιλέγουμε την απάντηση δ.



Η ταχύτητα u_{π} του ποδηλάτου είναι κάθε στιγμή ίση με την ταχύτητα των

κέντρων μάζας των τροχών του, δηλαδή ισχύει:

$$u_{\pi} = u_{cm}$$

Αφού κάθε τροχός του **ΚΥΛΙΕΤΑΙ** χωρίς να ολισθαίνει, το σημείο Γ με το οποίο ο τροχός έρχεται κάθε στιγμή σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε:

$$u_{\Gamma} = 0 \Leftrightarrow u_{cm} = u = R\omega$$

Το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου Α του τροχού προκύπτει ως το άθροισμα των δύο ταχυτήτων, της ταχύτητας u_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης και της γραμμικής ταχύτητας u λόγω της στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας, οπότε:

$$u_A = u_{cm} + u \Leftrightarrow u_A = 2u_{cm} \xrightarrow{u_{cm}=u_{\pi}} u_A = 2u_{\pi}$$

5 μονάδες

A3. Επιλέγουμε την απάντηση δ.

Η μέγιστη κινητική ενός ταλαντωτή παρέχεται από τη σχέση:

$$K_{max} = \frac{1}{2} m u_{max}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 A^2 \quad (1)$$

Αν διπλασιάσουμε τη συχνότητα της ταλάντωσης, χωρίς να μεταβάλλουμε τη μάζα του σώματος, η νέα μέγιστη κινητική ενέργεια θα είναι ίση με:

$$K'_{max} = \frac{1}{2} m u'^2_{max} = \frac{1}{2} m \omega'^2 A^2 = \frac{1}{2} m (2\pi f')^2 A^2 \quad (2)$$

Από (1), (2):

$$\frac{K_{max}}{K'_{max}} = \left(\frac{f}{f'}\right)^2 = \left(\frac{f}{2f}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow K'_{max} = 4K_{max}$$

Θα μπορούσαμε επίσης, να υπολογίσουμε τη σχέση ανάμεσα στις δύο σταθερές του ελατηρίου k_1 και k_2 :

$$D_1 = k_1 = m\omega^2 = m(2\pi f)^2$$

$$D_2 = k_2 = m\omega'^2 = m(2\pi f')^2$$

Οπότε



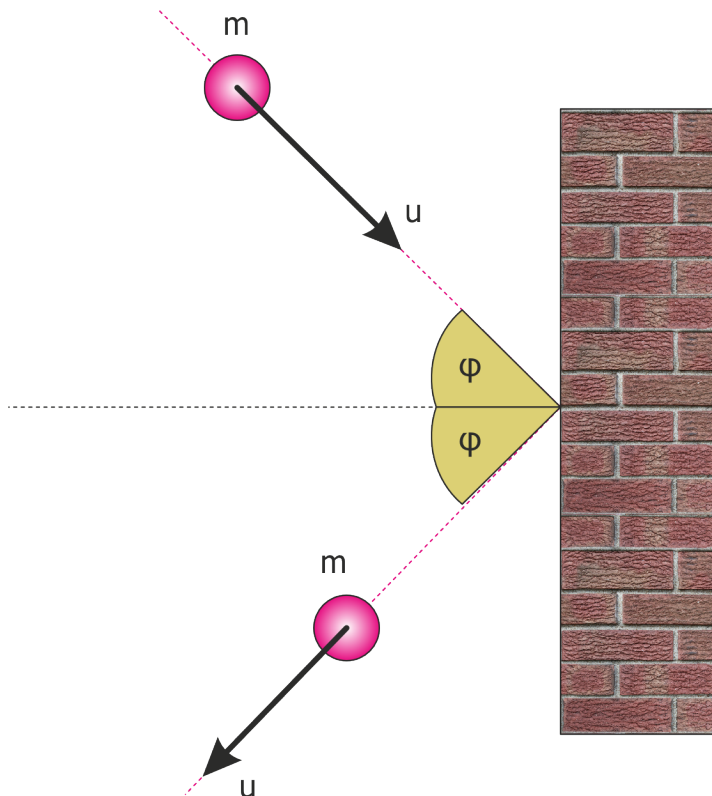
$$\frac{k_1}{k_2} = \left(\frac{f}{f'}\right)^2 = \left(\frac{f}{2f}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

και

$$\frac{K_{max}}{K'_{max}} = \frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}D_1A^2}{\frac{1}{2}D_2A^2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow K'_{max} = 4K_{max}$$

5 μονάδες

A4. Επιλέγουμε την απάντηση β.



Επειδή κρούση είναι ελαστική δε μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια της σφαίρας, οπότε το μέτρο της διατηρείται. Οπότε το ίδιο ισχύει και για το ΜΕΤΡΟ της ορμής της! Οπότε:

$$\Delta |p| = |p'| - |p| = 0$$

Προσοχή! Η ορμή της σφαίρας μεταβάλλεται!

5 μονάδες

A5. Σε κάθε πρόταση που ακολουθεί, να γράψετε το γράμμα **Σ** αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένη.

α. Αφού στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης το σώμα βρίσκεται στη μεγαλύτερη απόσταση από τη θέση ισορροπίας του που είναι και η θέση

φυσικού μήκους του ελατηρίου, το ελατήριο στις θέσεις αυτές θα βρίσκεται στη μέγιστη παραμόρφωση του, οπότε θα διαθέτει και τη μέγιστη δυναμική του ενέργεια. Το χρονικό διάστημα μετάβασης του σώματος από τη μια ακραία θέση στην άλλη ισούται με $\Delta t = T/2$. **Σ**

β. Από τις δύο χρονικές εξισώσεις απομάκρυνσης και επιτάχυνσης:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -a_{\max} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = a_{\max} \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Προκύπτει ότι η φάση της επιτάχυνσης προηγείται κατά π σε σχέση με τη φάση της απομάκρυνσης $\varphi_a > \varphi_x$, οπότε **Λ**.

γ. Επειδή το βάρος του εφαρμόζει στο κέντρο μάζας του στερεού δεν μπορεί να προκαλέσει ροπή, οπότε **Σ**.

δ. Μόνο από τα φυσικά χαρακτηριστικά του ταλαντωτή. **Λ**

ε. Επειδή ακριβώς το χρονικό διάστημα που διαρκεί μια κρούση είναι αμελητέο, θεωρούμε ότι η θέση και η κατάσταση του συστήματος δεν έχει μεταβληθεί, οπότε η δυναμική του ενέργεια διατηρείται! **Σ**

5 μονάδες

Θέμα Β

B1. Επιλέγουμε την απάντηση iii.

Επειδή τη χρονική στιγμή $t=0$, $x=0$ και $u>0$, ισχύει:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow 0 = A \cdot \eta\mu(\varphi_0) \Leftrightarrow \eta\mu(\varphi_0) = 0$$

$$\varphi_0 = 2k\pi + 0$$

$$\varphi_0 = 2k\pi + \pi$$

Όμως $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, οπότε οι πιθανές τιμές για την αρχική φάση είναι:

$$\varphi_0 = 0 \text{ και } \varphi_0 = \pi$$

όμως

$$u = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi_0$$

$$u = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow u = +\omega A$$

και

$$u = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow u = -\omega A$$

Επομένως θα δεχτούμε ότι $\varphi_0=0$ και η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης περιγράφεται από τη σχέση:

$$x = A \cdot \eta\mu\omega t$$

Θέτουμε όπου $x=+A/2$ (για πρώτη φορά) οπότε:

$$x = A \cdot \eta\mu\omega t \Leftrightarrow \frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\omega t \Leftrightarrow \eta\mu\omega t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega t = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\omega t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \text{και} \quad \omega t = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (2)$$

Επειδή όμως θέλουμε να διέρχεται από τη θέση $x=+A/2$ για 1^η φορά θα πρέπει να κινείται προς τα θετικά του άξονα της ταλάντωσης δηλαδή $u>0$, έτσι αποδεκτή λύση είναι μόνο η (1). Αρκεί να θέσουμε όπου $k=0$:

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t_1 = \frac{T}{12}$$

Δηλαδή το ελάχιστο χρονικό διάστημα μετάβασης του σώματος από τη ΘΙ του στη θέση $x=+A/2$ είναι $\Delta t_1=T/12$.

Όταν το σώμα μεταβεί για 1^η φορά στην ακραία θέση της ταλάντωσης δηλαδή $x=+A$, η χρονική στιγμή θα ισούται με $t_2=T/4$, οπότε το ελάχιστο χρονικό διάστημα μετάβασης του σώματος από τη θέση $x=+A/2$ στη θέση $x=+A/2$ ισούται με:

$$\Delta t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{T}{6}$$

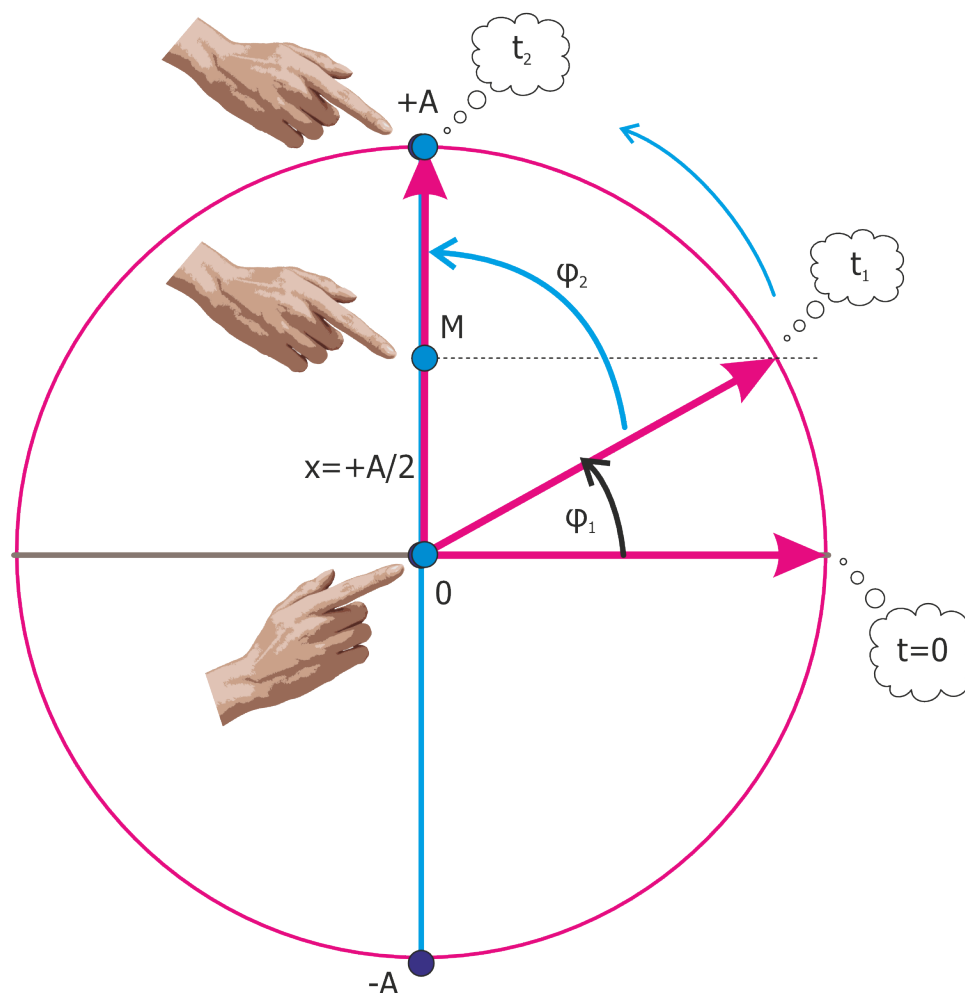
Επομένως:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\frac{T}{12}}{\frac{T}{6}} \Leftrightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{2}$$

Επειδή δουλεύοντας με τις χρονικές εξισώσεις στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι αρκετά δύσκολη διαδικασία και χρονοβόρα, μπορούμε να καταφύγουμε στη μέθοδο του περιστρεφόμενου διανύσματος. Στο επόμενο σχήμα, το



περιστρεφόμενο διάνυσμα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή μέτρησης των φάσεων και η προβολή του βρίσκεται στη ΘI του άξονα της ταλάντωσης. Τη χρονική στιγμή t_1 , η προβολή του βρίσκεται στο σημείο M και η απομάκρυνση από τη ΘI είναι $x=+A/2$, οπότε η γωνία που έχει στραφεί είναι ίση με φ_1 :



$$\eta\mu\varphi_1 = \frac{x}{A} = \frac{\frac{A}{2}}{A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

Οπότε

$$\varphi_1 = \omega \cdot \Delta t_1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t_1 \Leftrightarrow \Delta t_1 = \frac{T}{12}$$

Για να μεταβεί το υλικό σημείο από το σημείο M στην ακραία θέση $+A$ της ταλάντωσης, αρκεί το περιστρεφόμενο διάνυσμα να διαγράψει γωνία $\varphi_2 = \pi/3$ οπότε:

by
greg drakopoulos

$$\varphi_2 = \omega \cdot \Delta t_2 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t_2 \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{T}{6}$$

Οπότε

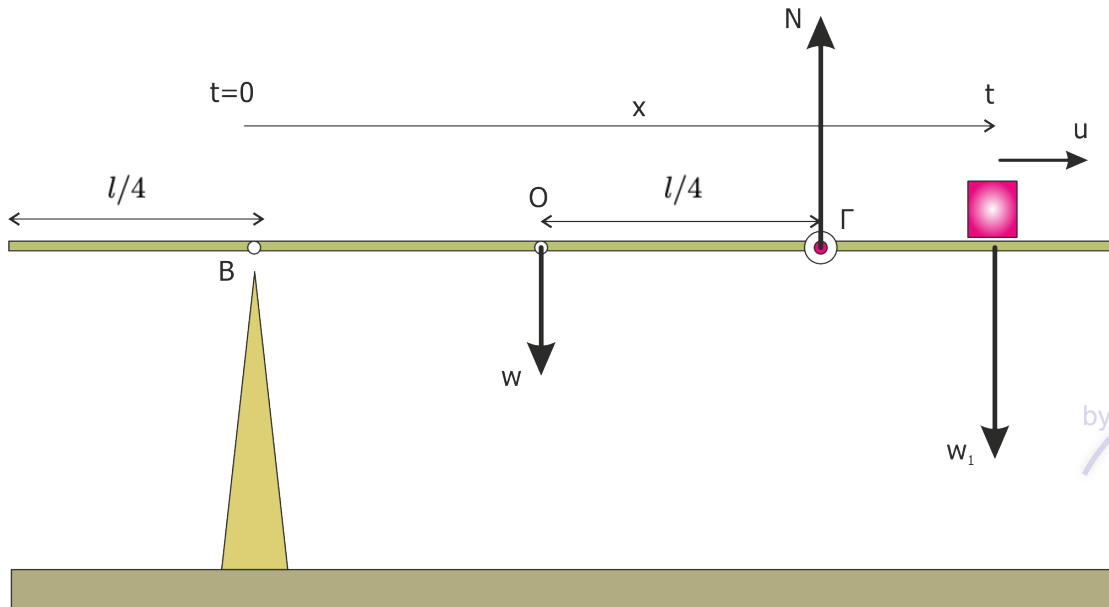
$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\frac{T}{12}}{\frac{T}{6}} \Leftrightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{2}$$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

2+6=8 μονάδες

B2. Επιλέγουμε την απάντηση iii.

Υποθέτουμε ότι ο κύβος διέρχεται τη χρονική στιγμή t , από ένα σημείο της ράβδου που απέχει απόσταση x από το σημείο B. Επίσης η ράβδος μόλις που έχασε την επαφή της με το στήριγμα και παραμένει οριακά οριζόντια.



Οπότε:

$$\Sigma \tau^{(\Gamma)} = 0 \Leftrightarrow w \cdot \frac{l}{4} = w_1 \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right) \Leftrightarrow Mg \cdot \frac{l}{4} = 2Mg \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{l}{4} = 2 \left(x - \frac{l}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{l}{4} = 2x - l \Leftrightarrow 2x = \frac{5l}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5l}{8}$$

Ο κύβος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, οπότε:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow u = \frac{x}{t} \Leftrightarrow x = ut$$

Οπότε

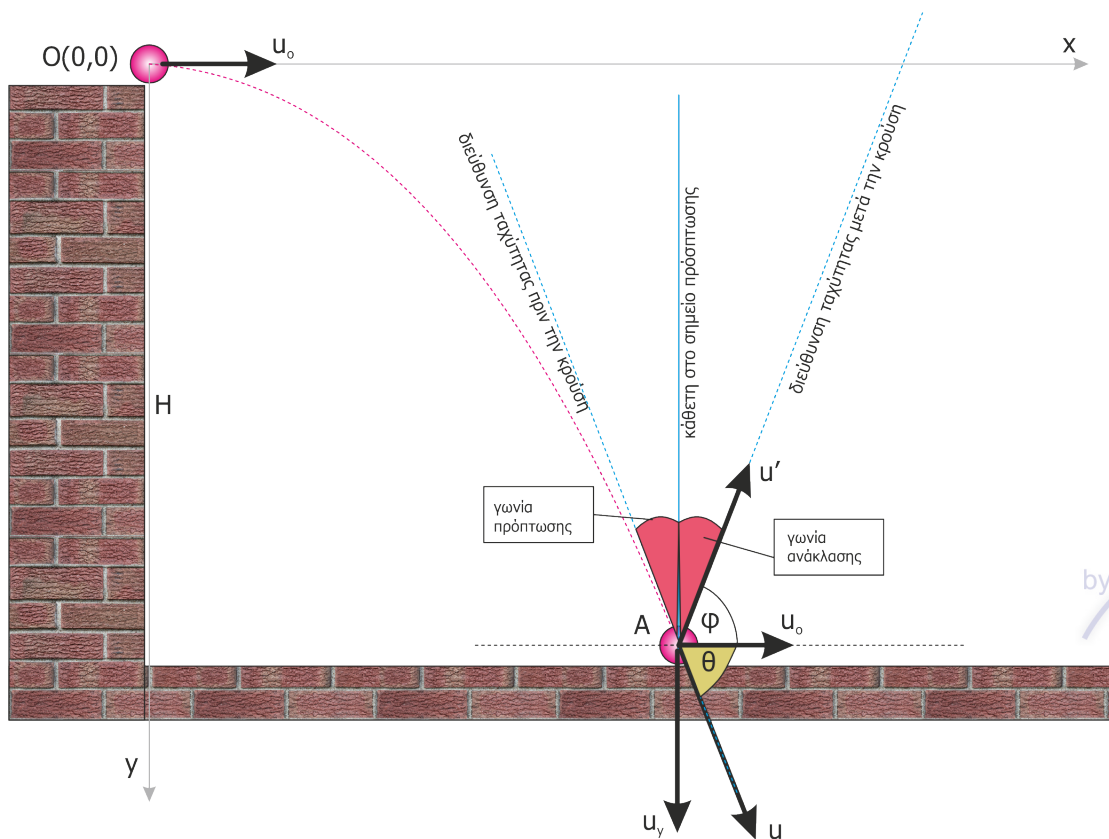
$$ut = \frac{5l}{8} \Leftrightarrow t = \frac{5l}{8u}$$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

2+6=8 μονάδες

B3. Επιλέγουμε την απάντηση iii.

Το σώμα εκτοξεύεται από το σημείο $O(0,0)$ και μετά από χρονικό διάστημα Δt , καταλήγει στο σημείο A , όπου ελάχιστα πριν χτυπήσει με το οριζόντιο έδαφος διαθέτει ταχύτητα μέτρου u .



Αν η κρούση είναι ελαστική, τότε δεν μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σώματος εξαιτίας της κρούσης και ανακλάται με την ίδια κατά ΜΕΤΡΟ ταχύτητα. Από τις ταχύτητες που σχηματίζονται στο σχήμα, φαίνεται ότι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας u του σώματος με την οριζόντια διεύθυνση είναι ίση με $\theta = \phi = 30^\circ$. Οπότε προκύπτει:

$$\varepsilon \phi \theta = \frac{u_y}{u_o} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{u_y}{u_o} \Leftrightarrow u_y = u_o \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$u_y = g \cdot \Delta t \Leftrightarrow u_o \frac{\sqrt{3}}{3} = g \cdot \Delta t \Leftrightarrow \Delta t = \frac{u_o \sqrt{3}}{g} \quad (2)$$

Οπότε η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος σε χρονικό διάστημα Δt ισούται με το ύψος H της βολής:

$$H = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{u_o}{g} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 \Leftrightarrow H = \frac{1}{2} g \cdot \frac{u_o^2}{g^2} \cdot \frac{3}{9} \Leftrightarrow$$

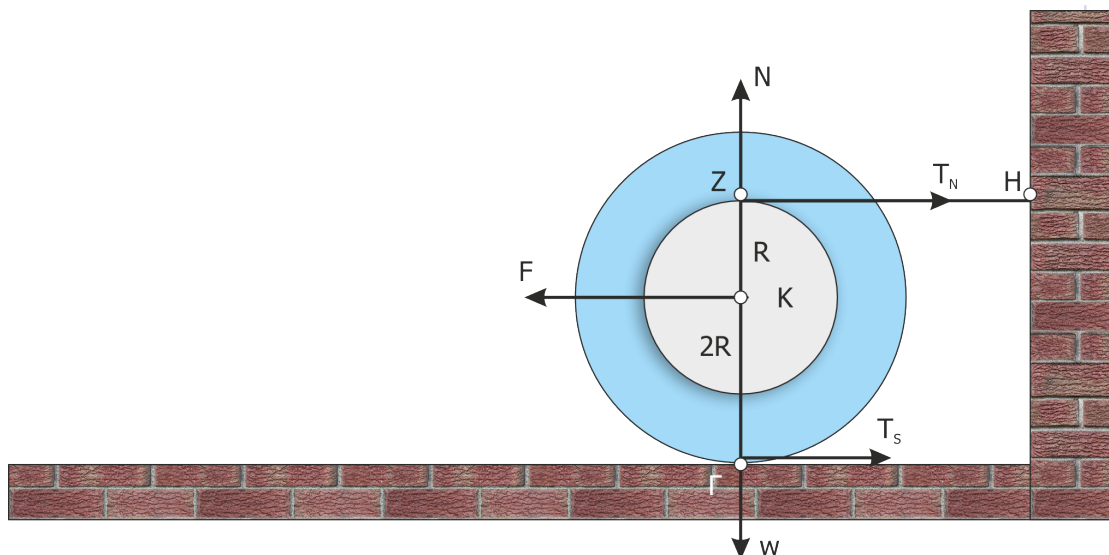
$$H = \frac{u_o^2}{6g}$$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

2+7=9μονάδες

Θέμα Γ

Γ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό. Το βάρος του μέτρου w , την κάθετη αντίδραση μέτρου N και τη στατική τριβή μέτρου T_S , από το οριζόντιο επίπεδο, τη δύναμη μέτρου F και την τάση του νήματος μέτρου T_N .



Αφού το στερεό ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma \tau^{(K)} = 0 \Leftrightarrow T_S \cdot 2R = T_N \cdot R \Leftrightarrow 2T_S = T_N \quad (1)$$

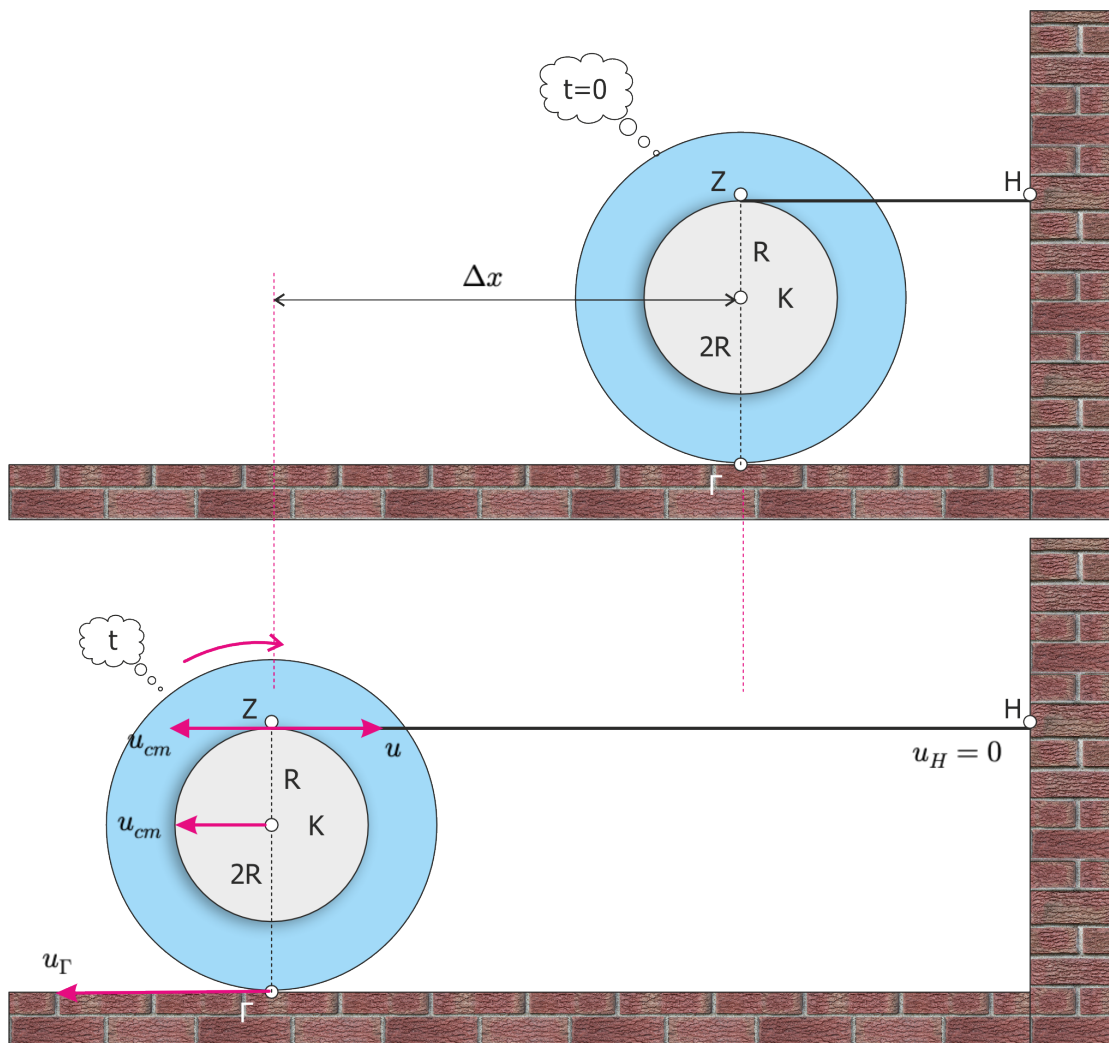
$$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F = T_S + T_N \xrightarrow{(1)} F = 3T_S \Leftrightarrow T_S = 10N$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = Mg \Leftrightarrow N = 20N$$

Για να μην ολισθαίνει πρέπει να ισχύει:

$$T_S \leq \mu N \Leftrightarrow 10 \leq \mu \cdot 20 \Leftrightarrow \mu \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu_{\min} = \frac{1}{2}$$

Γ2. Στο επόμενο σχήμα, παρατηρούμε ότι το σημείο H, δεν κινείται $u_H=0$, οπότε και $u_Z=0$ επομένως:



$$u_Z = 0 \Leftrightarrow u_{cm} = u = R\omega$$

και

$$\frac{du_{cm}}{dt} = \frac{du}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow a_{cm} = a_{\varepsilon} = R a_{\gamma\omega\omega}$$

Οπότε η μοναδική επιτάχυνση που διαθέτει το σημείο Z κάθε στιγμή είναι η κεντρομόλος του. Τη χρονική στιγμή $t=2s$, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σημείου Z ισούται με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του στερεού οπότε:

$$u = u_{cm} = a_{cm} \cdot t \Leftrightarrow u = 6m/s$$

και

$$a_{k,Z} = \frac{u^2}{R} \Leftrightarrow a_{k,Z} = 36 \text{ m/s}^2$$

Γ3. Όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα κατά $l=5m$ θα έχει μετατοπιστεί και το κέντρο μάζας του στερεού κατά την ίδια απόσταση, αφού ισχύει:

$$u_{cm} = u \Leftrightarrow u_{cm} \cdot dt = u \cdot dt \Leftrightarrow dx = dS \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=0}^t dx = \sum_{t=0}^t dS \Leftrightarrow \Delta x = \Delta S = l$$

Γ4. Ισχύει:

$$u = R\omega \Leftrightarrow u \cdot dt = R\omega \cdot dt \Leftrightarrow dS = Rd\theta \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=0}^t dS = R \sum_{t=0}^t d\theta \Leftrightarrow \Delta x = R \cdot \Delta\theta \Leftrightarrow \Delta\theta = 5 \text{ rad}$$

και

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Leftrightarrow N = \frac{5}{2\pi}$$

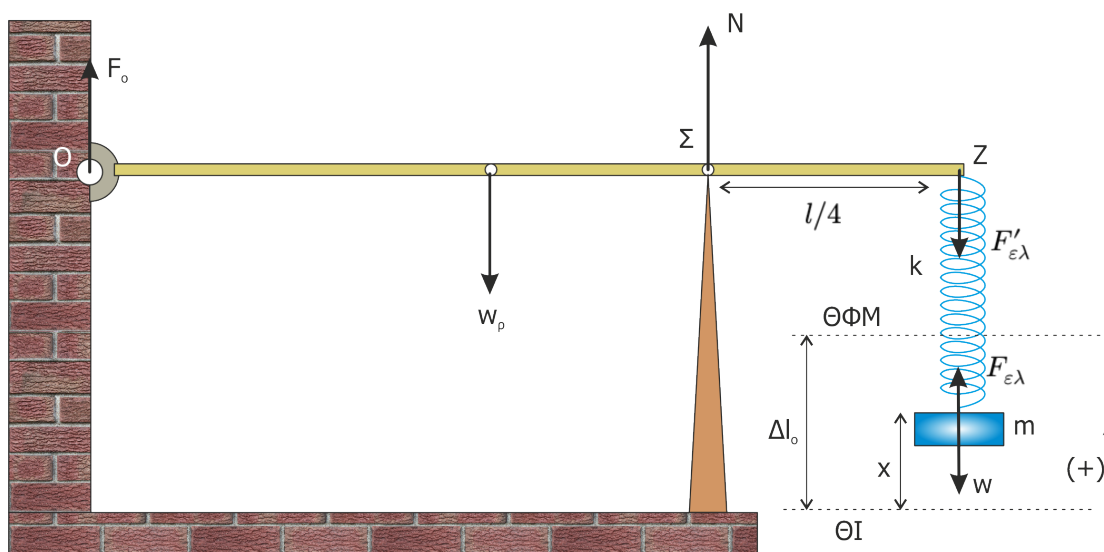
7+6+6+6=25 μονάδες

by
greg drakopoulos

Θέμα Δ

Δ1. Στο επόμενο σχήμα, το σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του με πλάτος A , που ισούται με την παραμόρφωση του ελατηρίου Δl_0 , όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του:

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow k \cdot \Delta l_0 = mg \Leftrightarrow \Delta l_0 = \frac{mg}{k} \Leftrightarrow \Delta l_0 = 0,1m$$



Δ2. Για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, βάρος και τάση ελατηρίου, όταν βρίσκεται σε απομάκρυνση $x > 0$ από τη θέση ισορροπίας του, όπως φαίνεται και στο σχήμα, ισχύει:

$$\Sigma \vec{F} = -D \vec{x} \xrightarrow{D=k} F_{\epsilon\lambda} - mg = -kx \Leftrightarrow F_{\epsilon\lambda} = mg - kx \Leftrightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = 10 - 100x \text{ (SI)}$$

Επειδή

$$D = k = m\omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Όμως αφού τη χρονική στιγμή $t=0$, το σώμα διέρχεται από τη ΘΙ του $x=0$ κινούμενο προς τα θετικά του άξονα της ταλάντωσης $u > 0$, η αρχική φάση

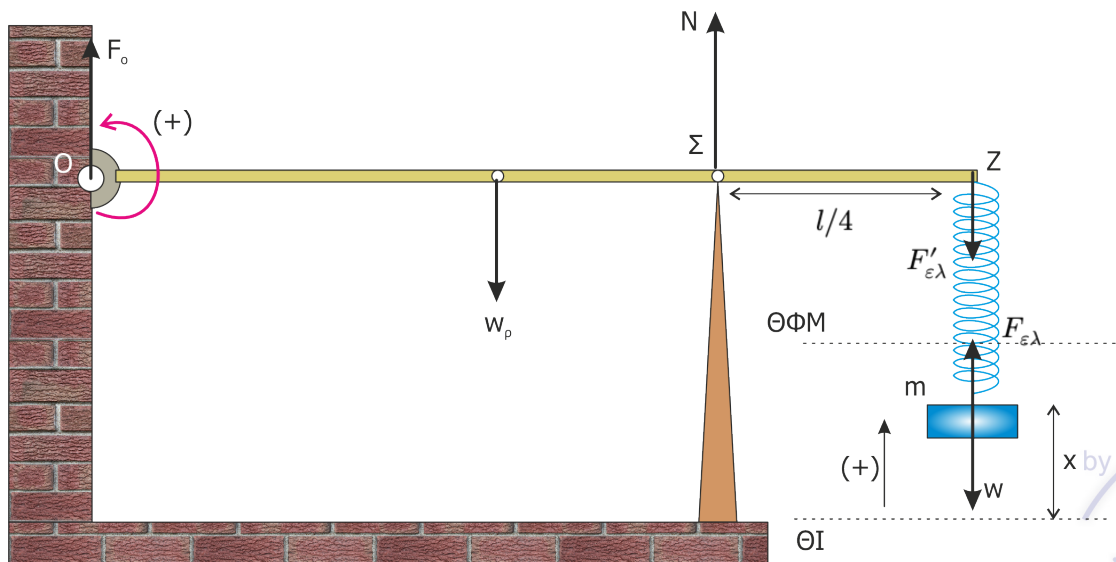
της ταλάντωσης είναι ίση με $\varphi_0=0$, οπότε η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη ΘΙ του περιγράφεται από τη σχέση:

$$x = A \cdot \eta \mu \omega t \Leftrightarrow x = 0,1 \cdot \eta \mu 10t \quad (SI)$$

Οπότε η χρονική εξίσωση της αλγεβρικής τιμής της δύναμης του ελατηρίου επιγράφεται από τη σχέση:

$$F_{\varepsilon\lambda} = 10 - 10 \cdot \eta \mu 10t \quad (SI)$$

Δ3. Στη διάρκεια της ταλάντωσης του σώματος, σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, δηλαδή το βάρος της, τη δύναμη από το στήριγμα, τη δύναμη από την άρθρωση και τη δύναμη από το ελατήριο, η οποία κατά μέτρο είναι ίση με τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα. Αφού λοιπόν η ράβδος ισορροπεί θα ισχύει:



$$\Sigma \tau^{(0)} = 0 \Leftrightarrow N \cdot \frac{3l}{4} = F'_{\varepsilon\lambda} \cdot l + Mg \cdot \frac{l}{2} \Leftrightarrow 3N = 4F'_{\varepsilon\lambda} + 2Mg \Leftrightarrow$$

$$N = \frac{4F'_{\varepsilon\lambda} + 2Mg}{3} \xrightarrow{|F_{\varepsilon\lambda}| = |F'_{\varepsilon\lambda}|} N = \frac{40 - 400x + 40}{3} \Leftrightarrow$$

$$N = \frac{80 - 400x}{3} \quad (SI)$$

Όταν $x = +A = +0,1m$:

